FSGU® AKADEMIE

# Produktion und Logistik

## Teil 2

Version 04-15-01

Staatliche Zentralstelle für Fernunterricht zugelassen zfu Nr.

# Produktion und Logistik Teil 1

**Kapitel 1 - Gliederung der BWL**



**Kapitel 2 - Der güterwirtschaftliche Leistungsprozess**



**Kapitel 3 - Aktivität und Technologie**

# Produktion und Logistik Teil 2

# Kapitel 1 - Grundlagen der Produktionstheorie

Lernziele:
Nach der Bearbeitung dieses Kapitels werden Sie gelernt haben,

- was man unter einer Produktionsfunktion versteht und wie man diese formal beschreiben kann.

- wie man den Produktionskoeffizienten definieren kann und was Produktivität bezeichnet.

- wie man die Grenzproduktivität und das partielle Grenzprodukt berechnet und interpretieren kann.

- welche Bedeutung die Produktionselastizität der Arbeit hat.

- was der Unterschied zwischen partieller und totaler Faktorvariation ist.

- was man unter dem Homogenitätsgrad versteht und wie er sich konkret berechnen lässt.

- wie die Substitutionselastizität zu berechnen ist und welchen Zusammenhang es mit homogenen Produktionsfunktionen gibt.

- wie man die Grenzrate der Substitution berechnen und interpretieren kann.

1. Eine Produktionsfunktion[1] beschreibt die unternehmensseitig vorhandenen Verbindungen zwischen Input- und Outputmengen.

2. Eine Produktionsfunktion kann (im Gegensatz zur Technologie) nur die effizienten Produktionsmöglichkeiten wiedergeben.

3. Eine Produktionsfunktion gibt den effizienten Rand wieder, der zu einer bestimmten Technologie gehört.

Ist f: $IR^K$ -> IR eine Abbildung, wobei $IR^K$ für den (reellen) Güterraum steht, dann ist f eine Produktionsfunktion zur Technologie T, sofern diese genau die (und nur jene) effizienten Aktivitäten in die Null abbildet (implizite Produktionsfunktion), also es gilt dann genauer [1]:

$$0 = f\left(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_K\right)$$

**Beispiel**: Mit zwei Einheiten des ersten Faktors und drei Einheiten des zweiten Faktors kann eine Outputeinheit generiert werden.

$$2r_1 + 3r_2 - x = 0 \quad \text{bzw.} \quad 2v_1 + 3v_2 - v_3 = 0$$

Kann man die Produktionsfunktion wie im obigen Beispiel nach einer Komponente umstellen (geht nicht immer ! !), also $v_k = f\left(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_K\right)$ , spricht man von einer expliziten Produktionsfunktion.

Im obigen Beispiel gilt also:

$$2r_1 + 3r_2 = x \quad \text{bzw.} \quad 2v_1 + 3v_2 = v_3$$

1 vgl. S.51 aus Fandel, Günter (1996): Produktion I. Heidelberg et. al.: Springer

**4. Produktionskoeffizient:** Verhältnis des jeweiligen Produktionsfaktors zum Output. Welche Menge des Faktors i ist erforderlich, um eine Mengeneinheit des Endprodukts effizient herzustellen?

Beispiel: Zur Herstellung von einem Kuchen sind 300g Mehl, 2 Eier und 0,2 Liter Milch notwendig. Allgemein schreibt man dann für die Produktionskoeffizienten $a_i$

$$a_{Mehl} = \frac{r_{Mehl}}{x_{Kuchen}}, \quad a_{Eier} = \frac{r_{Eier}}{x_{Kuchen}}, \quad a_{Milch} = \frac{r_{Milch}}{x_{Kuchen}}$$

bzw. konkret mit den gegebenen Zahlen

$$300\ gr = \frac{r_{Mehl}}{x_{Kuchen}}, \quad 2\ Stück = \frac{r_{Eier}}{x_{Kuchen}}, \quad 0{,}2\ Liter = \frac{r_{Milch}}{x_{Kuchen}}$$

**5. Produktivität:** Verhältnis des Outputs zum jeweiligen Produktionsfaktors. Welche Menge des Endprodukts kann hergestellt werden, wenn eine Mengeneinheit des jeweiligen Faktors effizient eingesetzt wird?

Beispiel: Zur Herstellung von einem Kuchen sind 300g Mehl, 2 Eier und 0,2 Liter Milch notwendig. Allgemein schreibt man dann für die Produktivität $1/a_i$.

$$\frac{1}{a_{Mehl}} = \frac{x_{Kuchen}}{r_{Mehl}}, \quad \frac{1}{a_{Eier}} = \frac{x_{Kuchen}}{r_{Eier}}, \quad \frac{1}{a_{Milch}} = \frac{x_{Kuchen}}{r_{Milch}}$$

bzw. konkret mit den gegebenen Zahlen

$$\frac{1}{300\ gr} = \frac{x_{Kuchen}}{r_{Mehl}}, \quad \frac{1}{2\ Stück} = \frac{x_{Kuchen}}{r_{Eier}}, \quad \frac{1}{0{,}2\ Liter} = \frac{x_{Kuchen}}{r_{Milch}}$$

# Aufgabe 11

## Minimalkostenkombination

Ein Unternehmen habe eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion gegeben. Die Faktorpreise liegen bei 4 bzw. 6 Euro. Insgesamt dürfen die Kosten 120€ nicht übersteigen. Welche Menge kann das Unternehmen maximal herstellen, wenn gilt:

$$f(r_1,r_2)=x=r_1^{3/4}\cdot r_2^{1/4} \quad \text{mit} \quad r_1,r_2\geq 0$$

**Lösung:** Zuerst ist die Kostenfunktion aufzustellen. Danach setzt man die nach einer Faktormenge umgeformte Bedingung in die Produktionsfunktion ein.

$$K_{max}=4r_1+6r_2=120 \qquad r_2=\frac{120-4r_1}{6}$$

$$f=x=r_1^{0,75}\cdot r_2^{0,25} \xrightarrow{\text{maximiere}} f=x=r_1^{0,75}\cdot\left(\frac{120-4r_1}{6}\right)^{0,25}=r_1^{0,75}\cdot\left(20-\frac{2}{3}r_1\right)^{0,25}$$

Da im Optimum die Ableitung notwendigerweise gleich Null sein muss, findet sich $r_1 = 25$.

$$f´=0,75r_1^{-0,25}\cdot\left(20-\frac{2}{3}r_1\right)^{0,25}+r_1^{0,75}\cdot 0,25\left(20-\frac{2}{3}r_1\right)^{0,25-1}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=0$$

äußere Ableitung * innere Ableitung

$$f´=0,75\frac{\left(20-\frac{2}{3}r_1\right)^{0,25}}{r_1^{0,25}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{r_1^{0,75}\cdot 0,25}{\left(20-\frac{2}{3}r_1\right)^{0,75}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\left(20-\frac{2}{3}r_1\right)^{0,75}\cdot\left(20-\frac{2}{3}r_1\right)^{0,25}}{\left(20-\frac{2}{3}r_1\right)^{0,75}r_1^{0,25}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{r_1^{0,25}\cdot r_1^{0,75}\cdot 0,25}{r_1^{0,25}\cdot\left(20-\frac{2}{3}r_1\right)^{0,75}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\left(20-\frac{2}{3}r_1\right)^{0,25+0,75}}{\left(20-\frac{2}{3}r_1\right)^{0,75}\cdot r_1^{0,25}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{r_1^{0,25}\cdot r_1^{0,75}\cdot 0,25}{\left(20-\frac{2}{3}r_1\right)^{0,75}\cdot r_1^{0,25}}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}\cdot\left(20-\frac{2}{3}r_1\right)-\frac{2}{3}\cdot r_1^{0,25+0,75}\cdot\frac{1}{4}}{\left(20-\frac{2}{3}r_1\right)^{0,75}\cdot r_1^{0,25}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{4}\cdot\left(20-\frac{2}{3}r_1\right)-\frac{2}{3}\cdot r_1\cdot\frac{1}{4}=0 \quad \Leftrightarrow\frac{3}{4}\cdot\left(20-\frac{2}{3}r_1\right)-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}r_1=0\Leftrightarrow\frac{20\cdot 3}{4}-\frac{3\cdot 2}{4\cdot 3}r_1-\frac{2}{12}r_1=0\Leftrightarrow 15=\frac{6}{12}r+\frac{2}{12}r_1\Leftrightarrow\frac{15\cdot 12}{8}=\frac{50}{2}=r_1$$

Nun bleibt noch die Menge des zweiten Faktors zu berechnen. Man findet sie zu 3,33 ME.

$$\frac{50}{2} = r_1 \quad => K_{max} = 4 \cdot \frac{50}{2} + 6r_2 = 120 \qquad \Rightarrow 120 - \frac{200}{2} = 6r_2 \quad => r_2 = \frac{20}{6}$$

Schließlich ist noch die maximale Outputmenge zu bestimmen. Diese lieg bei etwa 14 ME.

$$f = x = \left(\frac{50}{2}\right)^{0,75} \cdot \left(\frac{20}{6}\right)^{0,25} = 13{,}96 ME$$

**Hinweis:** Man hätte diese Aufgabe auch durch die Verwendung der Lagrange-Funktion lösen können. Dabei setzt man die Produktionsfunktion an und addiert das lambda-fache der nach Null umgestellten Kostenfunktion.

$$L(r_1, r_2, \lambda) = r_1^{0,75} \cdot r_2^{0,25} + \lambda \cdot (120 - 4r_1 - 6r_2)$$

Leitet man nach den beiden Faktormengen ab, so erhält man die Optimalbedingungen.

$$\frac{\partial L(r_1, r_2, \lambda)}{\partial r_1} = 0{,}75 \cdot r_1^{0,75-1} \cdot r_2^{0,25} - 4\lambda = 0 \qquad \frac{\partial L(r_1, r_2, \lambda)}{\partial r_2} = 0{,}25 \cdot r_1^{0,75} \cdot r_2^{0,25-1} - 6\lambda = 0$$

Gleichsetzen liefert

$$\frac{0{,}75 \cdot r_1^{-0,25} \cdot r_2^{0,25}}{4} = \lambda = \frac{0{,}25 \cdot r_1^{0,75} \cdot r_2^{-0,75}}{6} \quad <=> \quad \frac{0{,}75}{0{,}25} \cdot \frac{r_2^{0,25}}{r_2^{-0,75}} = \frac{4}{6} \cdot \frac{r_1^{0,75}}{r_1^{-0,25}} \quad <=> \quad 3 \cdot r_2^{0,25-(-0,75)} = \frac{2}{3} \cdot r_1^{0,75-(-0,25)} <=> \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot r_2 = r_1$$

Setzt man diese Bedingung in die Kostenfunktion ein, so erhält man die Mengen wie oben gezeigt.

**Herausgeber:**
**FSGU® AKADEMIE** - Ein Unternehmen der FSGU® GmbH
Erlenweg 1
D-77948 Friesenheim
kontakt@fsgu-akademie.de | www.fsgu-akademie.de
info@fernstudium-guide.de | www.fernstudium-guide.de