FERNSTUDIUM GUIDE *Zukunft beginnen.*

Wirtschaftsmathematik

Lineare Algebra Teil 1

Demo - Version

STAATLICHE ZENTRALSTELLE ZUGELASSEN Z F U FÜR FERNUNTERRICHT

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten. **FSGU® AKADEMIE**
Staatlich geprüft und zugelassen unter der Zulassungsnummer 7272714c

Lineare Algebra Teil 1

Kapitel 1 - Zweidimensionaler Vektorraum

1.1 Einführung

1.2 Lineare Unabhängigkeit

1.3 Skalarprodukt

1.3.1 Übungsaufgaben

1.4 Hessesche Normalform

Kapitel 2 - n-dimensionaler Vektorraum

2.1 Einführung

2.2 Lineare Unabhängigkeit

2.3 Skalarprodukt

2.4 Übungsaufgaben

2.5 Zusammenfassung

2.6 Allgemeine Übungen

Kapitel 1 - Zweidimensionaler Vektorraum
1.1 Einführung

Wozu Vektorrechnung:
Vektoren benötigt man beispielsweise zur Berechnung von Landkarten, für Routenplaner aber auch in den Naturwissenschaften und der Ökonomie.

Zu Beginn einige Definitionen:

$IR^2 = IR \times IR$ ist eine Zahlenmenge aus jeweils zwei reellen Zahlen, die zu einem Paar (sogenannte Zweitupel) zusammengefasst werden. Ein solches Paar ist etwa (2,1). Wir nennen IR^2 den zweidimensionalen Vektorraum.

Ein Vektor ist **ein** Element der oben dargestellten Zahlenmenge IR^2. Wir unterscheiden *nicht* zwischen Punkt oder Vektor.

Man schreibt den Vektor als Spaltenvektor in der Form $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Den Zeilenvektor erhält man, indem man den Spaltenvektor „transponiert“: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}^T = (2,1)$

Transponiert man den Zeilenvektor, erhält man wieder den Spaltenvektor: $(2,1)^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt der Nullvektor.

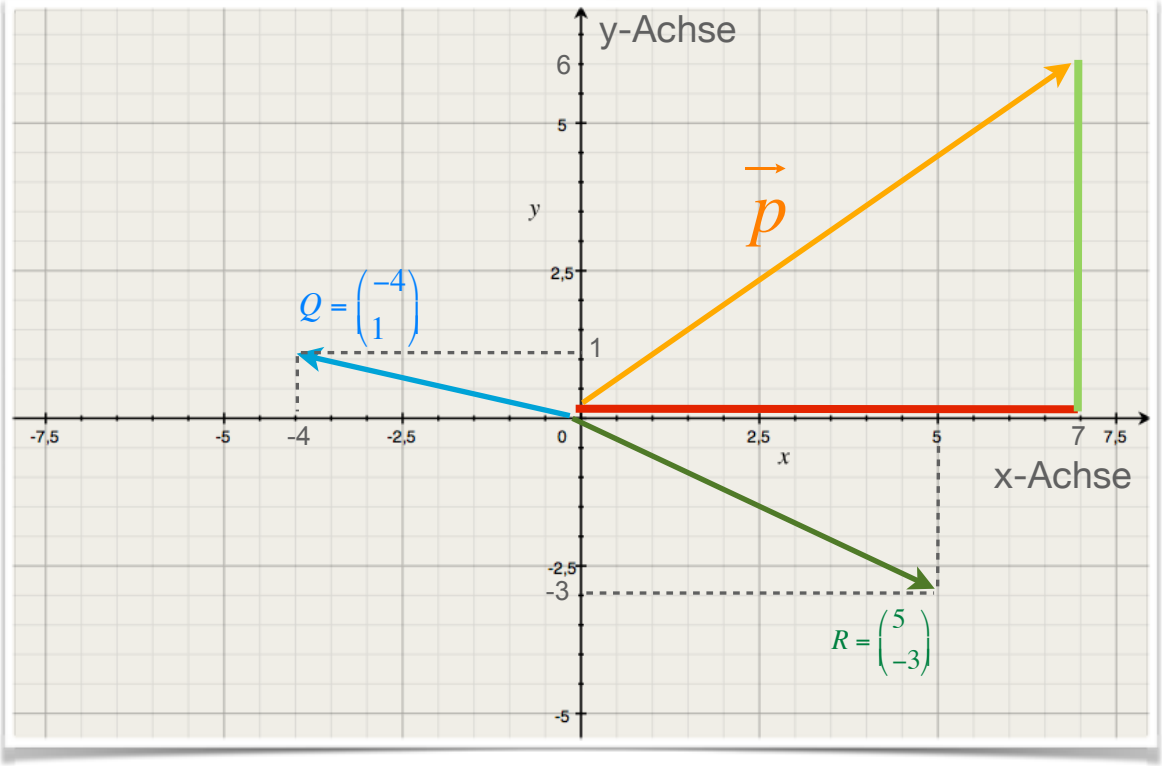
Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ heißen Einheitsvektoren des zweidim. Vektorraums.

Ein (zweidimensionaler) Vektor ist als Pfeil darstellbar. Wir schreiben daher $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektoren benötigen zur Darstellung ein Koordinatensystem:

Beispiel: Es seien die drei nachfolgenden Vektoren bzw. Punkte zu zeichnen. Dabei zeichnet man an der waagrechten x-Achse (die Abszisse) die obere Komponente. Die untere Komponente des Vektors trägt man auf der senkrechten y-Achse (Ordinate) ab.

$$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$



Merke: In einem zweidimensionalen Vektor steht in der oberen Komponente der Wert, der auf der x-Achse abzutragen ist. In der unteren Komponente steht der Wert für die y-Achse.

$$v = \begin{pmatrix} \text{T} \\ \text{I} \end{pmatrix}$$

VEKTOR

Rechenregeln für Vektoren - 1. Die Addition von Vektoren:

Vektoren können genauso wie Zahlen addiert werden. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Vektoren aus dem gleichen Vektorraum stammen müssen. Bei der Addition wird komponentenweise aufaddiert.

Beispiel: Gegeben seien die folgen vier Vektoren. Die Summe der Vektoren erhalten wir „komponentenweise“.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

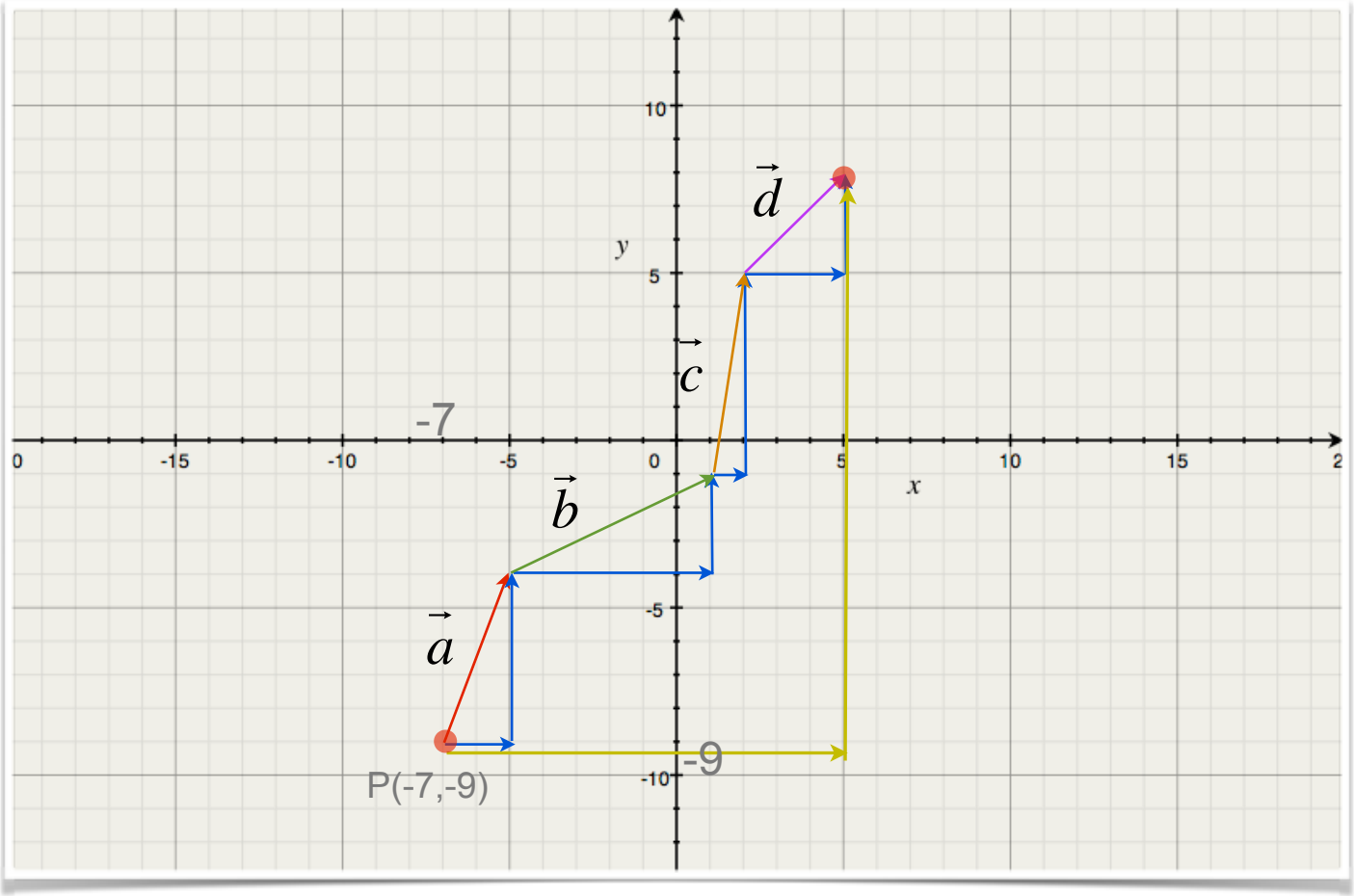
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{Summe} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

$$\overrightarrow{Summe} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{Summe} = \begin{pmatrix} 2+6+1+3 \\ 5+3+6+3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{Summe} = \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \end{pmatrix}$$



Aufgabe 11: Gegeben seien die drei Vektoren $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

A) Sind die drei Vektoren linear unabhängig und bilden demnach eine Basis des IR^3?

B) In der Menge L seien alle Vektoren enthalten, die orthogonal sowohl zu a als auch zu b stehen. Außerdem bezeichne K die Menge der Vektoren, die orthogonal sowohl zu a als auch zu c stehen. Prüfen Sie, ob die Mengen L und K identisch sind.

<u>Lösung A): ist falsch, die drei Vektoren sind linear abhängig:</u>

Hier sollte man nicht „drauflosrechnen“, sondern mit einer Beobachtung zuerst versuchen weiterzukommen. In den ersten beiden Komponenten entspricht der Vektor c dem Zweifachen des Vektors a.

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ .. \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ .. \end{pmatrix}$$

Passt also leider nur nicht die dritte Komponente. Aber wir haben ja noch den Vektor b, der nur in der dritten Komponente ein Element enthält. Damit können wir nun die den Parameter vor b berechnen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} .. \\ .. \\ 2 \end{pmatrix} + X \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} .. \\ .. \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} & 0 = 2 \cdot 2 + X \cdot (-3) - 1 \cdot (-2) \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = 4 - 3X + 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 3X = 6 \\ \Leftrightarrow \quad & X = 2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 11: Gegeben seien die drei Vektoren $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

B) In der Menge L seien alle Vektoren enthalten, die orthogonal sowohl zu a als auch zu b stehen. Außerdem bezeichne K die Menge der Vektoren, die orthogonal sowohl zu a als auch zu c stehen. Prüfen Sie, ob die Mengen L und K identisch sind.

Lösung B):

Wenn ein Vektor d zu a und zu b orthogonal ist, dann MUSS gelten: $a^T \cdot d = 0 \quad und \quad b^T \cdot d = 0$

$$b^T \cdot d = (0,0,-3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -3x_3 = 0 \qquad \Rightarrow x_3 = 0$$

$$a^T \cdot d = (1,-2,2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1x_1 - 2x_2 + 2 \cdot 0 = 1x_1 - 2x_2 = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = 2x_2$$

Nun können wir den Vektor d darstellen. Dieser hängt nur noch von einer Variablen x_2 ab: $d = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad x \in IR$

Für x können wir dabei eine beliebige reelle Zahl einsetzen.

Aufgabe 11: Gegeben seien die drei Vektoren $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

B) In der Menge L seien alle Vektoren enthalten, die orthogonal sowohl zu a als auch zu b stehen. Außerdem bezeichne K die Menge der Vektoren, die orthogonal sowohl zu a als auch zu c stehen. Prüfen Sie, ob die Mengen L und K identisch sind.

Lösung B):

Wenn ein Vektor e zu a und zu c orthogonal ist, dann MUSS gelten: $a^T \cdot e = 0 \quad und \quad c^T \cdot e = 0$

$$a^T \cdot e = (1,-2,2) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 1y_1 - 2y_2 + 2y_3 = 0 \qquad \Rightarrow y_1 = 2y_2 - 2y_3$$

$$c^T \cdot e = (2,-4,-2)^T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 2y_1 - 4y_2 - 2y_3 = 0 \quad \Rightarrow 2(2y_2 - 2y_3) - 4y_2 - 2y_3 = 0 \quad \Rightarrow 4y_2 - 4y_3 - 4y_2 - 2y_3 = 0 \quad \Rightarrow -6y_3 = 0$$

Wenn $y_3 = 0$ ist, folgt aus der 1. Bedingung: $y_1 = 2y_2 - 2y_3 = 2y_2$

Nun können wir den Vektor e darstellen. Dieser hängt nur noch von einer Variablen y_2 ab: $e = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \in IR$

Für y können wir dabei eine beliebige reelle Zahl einsetzen.

Herausgeber:
FSGU® AKADEMIE - Ein Unternehmen der FSGU® GmbH
Erlenweg 1
D-77948 Friesenheim
kontakt@fsgu-akademie.de | www.fsgu-akademie.de
info@fernstudium-guide.de | www.fernstudium-guide.de

Alle Rechte vorbehalten