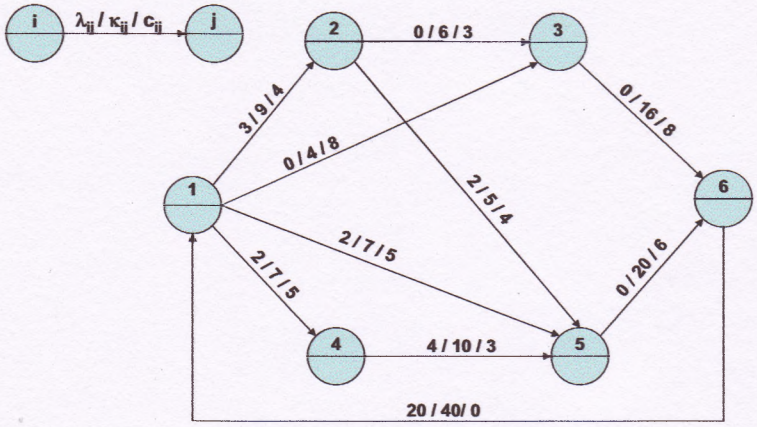
Wolfgang Pinkas

Problemstellungen und Lösungsmethoden aus der Graphentheorie

Einführung, Kürzeste Wege, Flussalgorithmen, Standort- und Transportprobleme, ausgewählte intelligente Strategien



Letzte Bearbeitung:

18. November 2015

EXEMPLAR FÜR #NAME# NUR ZUM PERSÖNLICHEN GEBRAUCH
WEITERGABE ODER VERVIELFÄLTIGUNGEN JEGLICHER ART
SIND UNTERSAGT

Dieses Handout ist entstanden aus der langjährigen Tätigkeit des Verfassers als Mentor der Fernuniversität in Hagen. Es versucht, die mathematischen und inhaltlichen Fragestellungen studentengerecht aufzuzeigen. Es soll daher in erster Linie als Lernhilfe und Klausurvorbereitung im Fach Operations Research zum Thema „Graphen und Netzwerke" dienen, ersetzt aber in keiner Weise ein eingehendes Studium der in den Lehrveranstaltungen angebotenen Lehrtexte und Literatur.

Grundlage dieser Ausarbeitung ist das Studienmaterial der Fernuniversität in Hagen, Lehrstuhl „Quantitative Methoden und Wirtschaftsmathematik", Prof. Dr. A. Kleine.

Die Autoren der Kurseinheiten 1 und 2 (852 Optimierung in Graphen) sind Prof. Dr. K. Neumann, Prof, Dr. D. Ohse

Die Autoren der Kurseinheit (857 Optimierung mit intelligenten Strategien) sind Prof. Dr. W. Rödder; Dr. F. Kulmann; Dr. H. P. Reidmacher

Das Kursmaterial unterliegt dem Urheberrecht.

Das Handout umfasst die Teile

I. Graphentheorie, Standortplanung und Transportoptimierung und Optimierung mit intelligenten Strategien
II. Lösungsvorschläge zu Klausuraufgaben der Fernuniversität in Hagen ab 2008 zum Modul 31801: Problemlösen in grafischen Strukturen

Für Fragen, Anregungen, Verbesserungsvorschläge und Fehlerhinweise bin ich Ihnen dankbar. Sie können mich erreichen unter

OR_PMM_PGS@t-online.de

Eine Vervielfältigung der Ausarbeitung in jeglicher Form wie auch die Weitergabe ist strikt untersagt. Sie verstößt gegen das Urheberrecht und wird daher strafrechtlich verfolgt.

1 Dualität **1**
1.1 Einführendes Beispiel 1
1.2 Das Dualitätstheorem 3
1.3 Gleichungen in der Dualität 6
1.4 Complementary-Slackness-Bedingung 7

2 Graphentheoretische Grundlagen **9**
2.1 Erreichbarkeit und Zusammenhang 9
2.1.1 Erreichbarkeit in Graphen 9
Inzidenz in einem Graphen 10
2.1.2 Erreichbarkeit und Verbundenheit in Digraphen 10
2.1.3 Weitere Definitionen und die Erreichbarkeitsmatrix eines Digraphen 10
Pfeilfolge 11
Weg 11
Erreichbarkeit 11
Semipfeilfolge 11
Semiweg 12
Verbundenheit 12
Zyklus 12
Inzidenz in einem Digraphen 13
Erreichbarkeitsmatrix 13
2.1.4 Zusammenhang in Graphen 15
2.1.5 Zusammenhang in Digraphen 15
Starker Zusammenhang in Digraphen 15
Schwache und starke Zusammenhangskomponenten 16
2.2 Darstellungsmöglichkeiten von Graphen und Digraphen 18
2.2.1 Adjazenzmatrix eines Graphen 18
2.2.2 Adjazenzmatrix eines Digraphen 18
2.2.3 Inzidenzmatrix eines Graphen 19
2.2.4 Inzidenzmatrix eines Digraphen 20
2.3 Spezifizierungen von Graphen und Digraphen 22
2.3.1 Wälder und Bäume 22
2.3.2 Gerüste 23
2.3.3 Bipartite Graphen und Digraphen 24

3 Algorithmen zu grundlegenden Begriffen **26**
3.1 Topologischen Sortierung 26
3.2 Bestimmung von R(i) 28

4 Minimalgerüste und kürzeste Wege **31**
4.1 Algorithmen zu Minimalgerüsten 31
4.1.1 Algorithmus von Kruskal 31
4.1.2 Algorithmus von Prim 33
Graphische Lösung 33
Algorithmische Lösung 36
Tabellarische Lösung 39
4.2 Kürzeste-Wege-Algorithmen 41
Exkurs: Dynamische Programmierung 42

4.2.1 Verfahren von Bellman ... 43
4.2.2 Kürzeste Wege nach Dijkstra ... 48
4.2.3 Verfahren von Ford ... 60
4.2.4 Der Tripel-Algorithmus ... 64

5 Flussalgorithmen ... 72
5.1 Schnitte in einem Netzwerk ... 72
5.1.1 Definition ... 72
5.1.2 Kapazität eines Schnittes ... 74
5.1.3 Fluss und Graph ... 74
5.1.4 Zirkulationsflüsse ... 76
5.2 Ford-Fulkerson ... 77
5.2.1 Bestimmung eines zulässigen Ausgangsflusses ... 77
5.2.2 Der Algorithmus ... 81
Markierungsprozess ... 81
Flussvergrößerung ... 83
Bestimmung des minimalen Schnittes ... 87
5.3 Der Out-of-Kilter- Algorithmus ... 88
5.3.1 Das Modell des kostenminimalen Zirkulationsflusses ... 88
5.3.2 Optimalität nach Complementary-Slackness-Bedingungen ... 92
5.3.3 Kilterzustände ... 94
5.3.4 Das Verfahren ... 95
Out-of-kilter-Zustände ... 96
Duale Zulässigkeit eines Pfeils ... 96
Fluss unter der Untergrenze ... 97
Fluss an der Untergrenze (Fall 1) ... 98
Fluss zwischen Unter- und Obergrenze ... 99
Fluss an der Obergrenze ... 99
Fluss oberhalb der Obergrenze ... 100
Kilter-Zahl ... 102
Out-of-Kilter-Prinzip ... 103
Die Flussänderung ... 103
Die Flusserhöhung ... 103
Die Flussverminderung ... 104
Flussänderung bei unserem Beispiel ... 104
Die Potentialänderung ... 105
Fortführung des Beispiels ... 108

6 Standortplanung ... 114
6.1 Einführung ... 114
6.2 Mediane und Zentren ... 116
6.2.1 Median und Zentrum im bewerteten Graphen ... 116
Der 1-Median ... 116
Das 1-Zentrum ... 119
6.2.2 Median und Zentrum im bewerteten Diagraphen ... 120
Der 1-Median ... 120
Das 1-Zentrum ... 123
6.3 p-Mediane ... 125
6.3.1 Vorüberlegungen und Definition eines p-Medians ... 125
6.3.2 Das p-Median-Problem als lineares Optimierungsproblem ... 128
6.4 p-Zentren ... 129
6.4.1 Vorüberlegungen und Definition des p-Zentren-Problems ... 129
6.4.2 Das p-Zentren-Problem als lineares Optimierungsproblem ... 131
6.5 Der Add-Algorithmus ... 134
6.5.1 Der Add-Algorithmus für p-Median-Probleme ... 134
6.5.2 Der Add-Algorithmus für p-Zentren-Probleme ... 136
6.5.3 Abschließende Bemerkungen ... 138
6.6 Warehouse-Location-Probleme (Lagerstandort-Probleme) ... 139
6.6.1 Das unkapazitierte einstufige WLP ... 139
6.6.2 Das kapazitierte einstufige WLP ... 140
6.7 Überdeckungsprobleme (Covering Problems) ... 141
6.7.1 Das Set-Covering-Problem als lineares Optimierungsmodell ... 143
6.7.2 Das Maximum-Covering-Problem als lineares Optimierungsmodell ... 144

7 Transportprobleme ... 146
7.1 Das klassische Transportproblem ... 146
7.2 Erweiterungen des klassischen Transportproblems ... 152
Lagermenge > Bedarfsmenge ... 152
Bedarfsmenge > Lagermenge ... 153
Obere Kapazitätsschranken auf den Transportwegen ... 153
Untere Kapazitätsschranken auf den Transportwegen ... 153
7.3 Das Umladeproblem ... 153
7.4 Modifikationen des Umladeproblems ... 155
7.5 Transport- und Umladeprobleme als Netzflussprobleme ... 156
7.6 Klassifizierung von Lösungsverfahren ... 156

8 Lösungsverfahren zum Transportproblem ... 160
8.1 Lösung mit Hilfe von Basispfeilen anhand eines Beispiels ... 160
8.2 Die Stepping-Stone-Methode ... 171
8.2.1 Das Transporttableau ... 171
8.2.2 Ermittlung der Dualvariablenwerte (Knotenpotentiale) ... 172
8.2.3 Die Lösungsverbesserung ... 174
8.3 Methoden zur Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung ... 177
8.3.1 Die Nord-West-Ecken-Methode ... 178
8.3.2 Die Zeilenfolge-Methode ... 180
8.3.3 Die Zeilen-Spalten-Minimum-Methode ... 181

8.3.4 Die Matrix-Minimum-Methode ... 182
8.3.5 Die Vogelsche Approximationsmethode ... 182

9 Das Out-of-Kilter-Verfahren für Transportprobleme ... 186

10 Die Ungarische Methode ... 191
10.1 Das Zuordnungsproblem ... 191
10.2 Bestimmung einer Startlösung im Zuordnungsproblem ... 193
10.3 Die Flussänderung ... 196
10.4 Die Potentialänderung ... 198
10.5 Die Ungarische Methode im Transporttableau ... 200
10.5.1 Ermittlung der Matrix der reduzierten Kosten ... 200
10.5.2 Bestimmung der Menge der unabhängigen Nullen UN. ... 201
10.5.3 Markierungsprozess ... 202
Markierungsprozess M1 ... 202
Markierungsprozess M2 ... 203
10.5.4 Korrektur von UN ... 203
10.5.5 Korrektur der Dualvariablen und der Matrix $\overline{C}$ ... 204

11 Intelligente Strategien – Einführung ... 207

12 Komplexität ... 208
12.1 Grundlegende Definitionen ... 208
12.1.1 Input – Problem – Algorithmus ... 208
12.1.2 Programm und elementare Rechenschritte ... 208
12.1.3 Grundlegende Definitionen zur Bestimmung der Komplexität ... 209
12.1.4 Komplexität eines Algorithmus ... 211
12.1.5 Binäre Suche ... 212

13 Ausgewählte exakte Lösungsmethoden ... 215
13.1 Das Branch & Bound-Verfahren zur Lösung kombinatorischer Probleme ... 215
13.2 Der A*-Algorithmus ... 219
13.2.1 Suchverfahren ... 219
13.2.2 Suchstrategien ... 220
13.2.3 Grundlagen des A*-Algorithmus ... 222
13.2.4 Das heuristische Verfahren „Nächster Nachbar" ... 223
13.2.5 Beispiel zum A*-Algorithmus ... 224

14 Klassische Heuristiken ... 230
14.1 Definition der Performance einer Heuristik ... 231
14.2 „moves" und Nachbarschaft ... 232
Anmerkung ... 235
14.3 Approximative Algorithmen ... 235

15 Das Verfahren Simulated Annealing ... 236
15.1 Pseudocode zu Simulated Annealing ... 237
15.2 Beispiel zum Simulated Annealing ... 240

16 Das Verfahren Tabu Search ... 245
16.1 Einführung ... 245
16.2 Algorithmus Tabu Search im Pseudocode ... 246
16.3 Die Tabu-Liste zur Vermeidung von Zyklen ... 247
16.4 Beispiel zum Tabu Search ... 250

17 Genetische Algorithmen ... 253
17.1 Grundbegriffe ... 253
Individuum – Population ... 253
Codierung ... 253
Gen ... 254
Genotyp – Phänotyp ... 254
Generation ... 254
Fitness ... 254
17.2 Arbeitsweise genetischer Algorithmen ... 254
17.3 Operatoren ... 261
17.3.1 Rekombination ... 261
Crossover-Operatoren ... 261
Mutation ... 263
17.3.2 Erzeugung der neuen Generation ... 263
17.3.3 Abbruchkriterium ... 263

17.4 Darstellung anhand der Beispielrundreise 264

Anhang 1: Lösung der Distanzmatrix zur Bauernschaftstruktur, S. 118ff 269

Anhang 2: Berechnungen der Bounds im Beispiel zum A*, S. 224ff 272