

Wolfgang Pinkas

**Mathematische Modelle
in den Wirtschaftswissenschaften**

**Netzplantechnik, Lineare Modelle, Simplexalgorithmus,
Lösung nichtlinearer Modelle, unscharf formulierte Probleme**

**Ausgewählter betriebswirtschaftliche Modelle und deren
Lösungsmöglichkeiten mit Hilfe der Tabellenkalkulation**

**Basiswissen Statistik,
Techniken der stochastischen Simulation, Warteschlangen**

Letzte Bearbeitung

14. November 2015

EXEMPLAR FÜR #NAME# NUR ZUM PERSÖNLICHEN GEBRAUCH

**WEITERGABE ODER VERVIELFÄLTIGUNGEN JEDLICHER ART
SIND UNTERSAGT**

Dieses Handout ist entstanden aus der langjährigen Tätigkeit des Verfassers als Mentor der Fernuniversität in Hagen. Es versucht, die mathematischen und inhaltlichen Fragestellungen studentengerecht aufzuzeigen. Es soll daher in erster Linie als Lernhilfe und Klausurvorbereitung im Fach Operations Research zum Thema „Graphen und Netzwerke“ dienen, ersetzt aber in keiner Weise ein eingehendes Studium der in den Lehrveranstaltungen angebotenen Lehrtexte und Literatur.

Grundlage dieser Ausarbeitung ist das Studienmaterial der Fernuniversität in Hagen, Lehrstuhl „Quantitative Methoden und Wirtschaftsmathematik“, Prof. Dr. A. Kleine, zum Modul 31811 „Planen mit mathematischen Modellen“.

Die Autoren der Kurseinheit 512: Planungs- und Entscheidungstechniken“ sind Univ.-Prof. Dr. Wilhelm Rödder; Dr. André Ahuja

Der Autor der Kurseinheit 844: Computergestützte Optimierung ist Dr. Heinz Peter Reidmacher

Der Autor der Kurseinheit 859: Stochastische Simulation ist Prof. Dr. Elmar Reucher

Das Kursmaterial wie auch die Klausuraufgaben unterliegen dem Urheberrecht.

Ich habe mich bemüht, meine langjährigen Erfahrungen der Betreuung von Fernstudenten in diesem Fach mit in die Ausarbeitung einfließen zu lassen, um so Ihnen die Inhalte verständlich näher zu bringen.

Ich weiß auch, dass der Teufel im Detail steckt. Ich bin Ihnen dankbar, wenn Sie mich auf Fehler, Unverständlichkeiten und Irrtümer hinweisen. Nur so kann es uns gemeinsam gelingen, ein gutes Werk zu vollenden.

Für Fragen, Anregungen, Verbesserungsvorschläge und Fehlerhinweise bin ich Ihnen dankbar. Sie können mich erreichen unter

OR_PMM_PGS@t-online.de

Eine Vervielfältigung der Ausarbeitung ist strikt untersagt. Sie verstößt gegen das Urheberrecht und wird daher strafrechtlich verfolgt.

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Netzplantechnik | 1 |
| 1.1 | Strukturanalyse | 1 |
| 1.2 | Möglichkeiten der Netzplandarstellung | 1 |
| 1.2.1 | Vorgangsknotennetz | 2 |
| 1.2.2 | Vorgangspfeilnetz | 3 |
| 1.2.3 | Ereignisknotennetz | 4 |
| 1.3 | Zeitanalyse | 4 |
| 1.3.1 | Vorwärts- und Rückwärtsrechnung | 5 |
| 1.3.2 | Gesamtpuffer GP_i | 6 |
| 1.3.3 | Freier Puffer FP_i | 7 |
| 1.3.4 | Unabhängiger Puffer | 8 |
| 1.3.5 | „Positive“ bzw. „negative“ Verschiebungen eines Vorgangs | 10 |
| | Wartezeiten | 10 |
| | Überlappungen von Vorgängen | 10 |
| 1.3.6 | Einfluss von Wartezeiten auf die Puffer | 11 |
| 1.4 | Beispiel zum klassischen CPM | 12 |
| 2 | Netzplantechnik nach MS Project (CPM) | 18 |
| 2.1 | Kurzer Überblick über das Programm MS Project | 18 |
| 2.2 | Umsetzung von Projekten nach Art von MS Project | 20 |
| 2.2.1 | Konstruktion des Netzplanbeispiels | 21 |
| 2.2.2 | Zeitanalyse am Netzplan | 23 |
| | Früheste Anfangszeitpunkte (FAZ) | 23 |
| | Späteste Anfangszeitpunkte (SAZ) | 24 |
| | Berechnung der Gesamtpufferzeiten und kritische Vorgänge | 26 |
| | Berechnung der freien Pufferzeiten | 27 |
| 2.2.3 | Berücksichtigung von Wartezeiten | 28 |
| 2.2.4 | Berücksichtigung von vorgegebenen Zeitpunkten | 32 |
| 3 | Optimierungsmodelle in der Betriebswirtschaftslehre | 35 |
| 3.1 | Produktionsplanungsmodelle | 36 |
| 3.1.1 | Der einstufige Produktionsprozess | 37 |
| 3.1.2 | Modelle zur Substitution linear-limitationaler Produktionen | 39 |
| | Vorüberlegungen | 39 |
| | Substitutionalität in limitationalen Prozessen | 40 |
| | Faktoreinsatzplanung | 43 |
| 3.1.3 | Kostenminimierung in limitationalen Produktionsprozessen | 44 |
| 3.2 | Mehrstufige Produktionsprozesse | 46 |
| 3.3 | Modelle in der Kuppelproduktion | 47 |
| 3.4 | Weitere Problemstellungen im Unternehmen | 48 |
| 3.4.1 | Das Mischungsproblem | 48 |
| 3.4.2 | Das Verschnittproblem | 50 |
| 4 | Lineare Planungsrechnung | 52 |
| 4.1 | Das klassische lineare Optimierungsmodell | 52 |
| 4.2 | Die kanonische Form | 52 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.2.1 | Das kanonische Ausgangstableau | 54 |
| 4.2.2 | Prüfung auf Zulässigkeit der Lösung | 55 |
| 4.2.3 | Prüfung auf Optimalität der Lösung | 55 |
| 4.2.4 | Auswahl der Pivotspalte | 56 |
| 4.2.5 | Auswahl der Pivotzeile | 56 |
| 4.2.6 | Berechnung der neuen Pivotzeile | 58 |
| 4.2.7 | Berechnung der neuen Tableaus | 58 |
| 4.2.8 | Ausgabe der optimalen Lösung | 59 |
| 4.3 | Algorithmische Beschreibung des klassischen Simplexalgorithmus | 59 |
| 4.4 | Betriebswirtschaftliche Interpretation der Tableauelemente | 61 |
| 5 | Der Zwei-Phasen-Simplexalgorithmus | 65 |
| 5.1 | Die Zielvorschrift min | 65 |
| 5.2 | Die Behandlung von „ \geq -Restriktionen“ | 65 |
| 5.3 | Die Behandlung von „ $=$ -Restriktionen“ | 67 |
| 5.4 | Die gezielte Elimination von Hilfsvariablen | 68 |
| 5.4.1 | Definition der Hilfszielfunktion | 69 |
| 5.4.2 | Integration der Hilfszielfunktion | 69 |
| 5.5 | Die erste Phase | 71 |
| 5.6 | Die zweite Phase | 75 |
| 5.7 | Algorithmische Beschreibung des Zwei-Phasen-Simplexalgorithmus | 75 |
| 6 | Weitere betriebswirtschaftliche Problemstellungen | 77 |
| 6.1 | Planung von Transport- und Güterströmen | 77 |
| 6.1.1 | Modell zum transportkostenminimalen Güterstrom | 77 |
| 6.1.2 | Maximal-Fluss-Problem | 82 |
| 6.1.3 | Das Kürzester-Weg-Problem | 84 |
| 6.1.4 | Das Transportproblem | 84 |
| 6.1.5 | Das Zuordnungsproblem | 86 |
| 6.2 | Die Vogelsche Approximationsmethode | 87 |
| 7 | Quadratische Programme und Quotientenoptimierung | 94 |
| 7.1 | Quadratische Programme | 95 |
| 7.1.1 | Die quadratische Form | 95 |
| 7.1.2 | Das Kuhn-Tucker-Theorem | 96 |
| 7.1.3 | Grafische Ergänzungen | 98 |
| 7.1.4 | Das fast lineare Ersatzprogramm und seine Lösung | 100 |
| 7.1.5 | Beispiel zur quadratischen Form | 101 |
| 7.2 | Ein Lösungsansatz zur Quotientenoptimierung | 104 |
| 7.2.1 | Vorüberlegungen | 104 |
| 7.2.2 | Der Quotienten-Algorithmus | 107 |
| | Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung | 108 |
| | Berechnung des Optimums mit dem Ersatzprogramm | 109 |
| | Bestimmung des Ausgangstableaus für $x^* \neq (0, 0)^T$ | 111 |
| 8 | Ganzzahligkeit und Lineare Programmierung | 113 |
| 8.1 | Erläuterungen zum Branch Bound mit LP-Relaxation | 113 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 8.2 | Algorithmische Beschreibung..... | 115 |
| 8.3 | September 2008 – A2 (LP-Modellbildung und B & B) | 117 |
| 9 | Separable Programmierung | 122 |
| 9.1 | Einführung..... | 122 |
| 10 | Unscharf formulierte Probleme | 125 |
| 10.1 | Weiche Planung | 125 |
| 10.2 | Unscharfe Relationen | 128 |
| 10.3 | Unscharfe Relationen im LOP | 130 |
| 11 | Einsatz der Tabellenkalkulation | 131 |
| 12 | Matrixfunktionen in Excel..... | 132 |
| 12.1 | MTRANS(Matrix)..... | 132 |
| 12.2 | MMULT(Matrix1;Matrix2)..... | 135 |
| 12.3 | MINV(Matrix)..... | 136 |
| 12.4 | SUMMENPRODUKT(Matrix1;Matrix2; ... ;Matrix30)..... | 137 |
| 12.5 | Der Solver..... | 139 |
| 13 | Lösung linearer betriebswirtschaftlicher Modelle mit dem Solver | 144 |
| 13.1 | Das Produktionsplanungsproblem | 144 |
| 13.2 | Der Antwortbericht | 152 |
| 13.3 | Der Sensitivitätsbericht | 153 |
| 13.4 | Der Grenzwertbericht..... | 155 |
| 14 | Lösung verschiedener Probleme mit der Tabellenkalkulation | 156 |
| 14.1 | Das Mischungsproblem..... | 156 |
| 14.1.1 | Problembeschreibung | 156 |
| 14.1.2 | Lösung des mengenorientierten Mischungsproblem | 158 |
| 14.1.3 | Lösung des anteilorientierten Mischungsproblems..... | 162 |
| 14.2 | Das Zuordnungsproblem | 164 |
| 14.2.1 | Problembeschreibung | 164 |
| 14.2.2 | Lösung des Zuordnungsproblems mit Hilfe von Dummies | 167 |
| 14.2.3 | Die Lösung des unausgeglichene Zuordnungsproblems | 169 |
| 14.3 | Das Rucksackproblem..... | 172 |
| 14.3.1 | Lösung des klassischen Rucksackproblems mit dem Solver..... | 172 |
| 14.3.2 | Lösung des allgemeinen Rucksackproblems mit Hilfe des Solvers | 174 |
| 14.4 | Das Transportproblem | 175 |
| 14.4.1 | Problembeschreibung – klassisches Transportproblem | 175 |
| | Distanzenberechnung | 176 |
| | Problemformulierung | 177 |
| 14.4.2 | Modifikationen des klassischen Transportproblems | 178 |
| | Lagermenge > Bedarfsmenge..... | 178 |
| | Bedarfsmenge > Lagermenge..... | 178 |
| 14.4.3 | Formulierung des allgemeinen Transportmodells | 178 |
| 14.4.4 | Beispiel zum allgemeinen Transportproblem..... | 179 |
| 14.5 | Das Umladeproblem | 181 |
| 14.5.1 | Problembeschreibung | 181 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 14.5.2 | Gestaltung des Umladeproblems im Solver | 182 |
| 14.6 | Bemerkung zum Standortproblem | 184 |
| 14.7 | Das Zuschneideproblem | 189 |
| 14.8 | Einführung | 189 |
| 14.8.1 | Das eindimensionale Zuschneideproblem | 189 |
| | Verschnittminimierung | 189 |
| | Minimierung des Inputs | 192 |
| | Minimierung bei bekannten Kosten | 193 |
| 14.8.2 | Das zweidimensionale Zuschneideproblem | 195 |
| 14.9 | Das Cash-Matching-Problem | 195 |
| 14.9.1 | Das Standard-CM-Problem | 195 |
| 14.9.2 | Das erweiterte CM-Modell | 197 |
| 14.10 | Portefeuille-Analyse | 199 |
| 14.11 | Deckungsbeitragsmaximierung | 205 |
| 14.12 | Multiple Preis-Absatz-Funktionen | 207 |
| 15 | Stochastische Simulation | 213 |
| 15.1 | Diskrete Verteilungen | 213 |
| 15.1.1 | Binomialverteilung: | 213 |
| 15.1.2 | Poissonverteilung | 215 |
| 15.2 | Stetige Verteilungen | 216 |
| 15.2.1 | Gleichverteilung | 216 |
| 15.2.2 | Exponentialverteilung | 218 |
| 15.2.3 | Normalverteilung | 218 |
| 15.2.4 | Zentraler Grenzwertsatz | 220 |
| 15.2.5 | Konfidenzintervalle | 220 |
| 16 | Techniken der stochastischen Simulation | 224 |
| 16.1 | Einfacher Test auf Gleichverteilung | 224 |
| 16.2 | Multiplikative Kongruenzmethode (Lehmer) | 225 |
| 16.2.1 | Modulo | 225 |
| 16.2.2 | Das Verfahren | 226 |
| 16.3 | Beispiel aus dem Skriptum | 227 |
| 16.4 | Stichprobenumfang | 227 |
| 16.5 | Inversionsverfahren | 228 |
| 17 | Anwendungen zur stochastischen Simulation | 229 |
| 17.1 | Warteschlangen | 229 |
| 17.1.1 | Einführung | 229 |
| 17.1.2 | Begriffe | 229 |
| | Bedienzeit (b_i): | 229 |
| | Leerzeit: | 229 |
| | Zwischenankunftszeit (a_i): | 229 |
| | Ankunftsrate: | 230 |
| | Bedienrate: | 230 |
| | Ein-Kanalsystem | 230 |

| | |
|--|-----|
| Mehr-Kanalsystem | 230 |
| Klassifizierungscode (K1, K2, K3, K4, K5): | 231 |
| Bedienregeln | 231 |
| 17.1.3 Ein-Kanal-System | 232 |
| Auslastungsgrad | 232 |
| Mittlere Schlängelänge | 232 |
| Mittlere Wartezeit | 233 |
| Beispiel (M; M; 1; ∞ ; FIFO) | 233 |
| 17.1.4 Mehrkanalsysteme | 241 |
| Seriellles Mehrkanalsystem | 242 |
| Beispiel | 242 |
| 17.1.5 Paralleles Warteschlangensystem | 246 |
| 17.2 Maschinenlaufzeiten / Instandhaltungsstrategien | 247 |
| Beispiel | 247 |
| Strategie 0 | 249 |
| Strategie I | 250 |
| Strategie II | 256 |